UVSQ | ISTY

Institut des Sciences et Techniques des Yvelines

CAMPUS DE MANTES EN YVELINES

CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

université PARIS-SACLAY

ALGÈBRE LOGIQUE

UVSQ | ISTY
Institut des Sciences et Techniques des Yvelines
CAMPUS DE MANTES EN YVELINES
CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES
université PARIS-SACLAY

Bases de numération

Bases de numération

De tout temps, l'homme a cherché à compter avec plus ou moins de réussite.

Les romains ont mis en place un système de numération basé sur des symboles littéraux rendant difficile le calcul.

C'est vers l'an 750 en Inde, qu’est mise en place la numération décimale que nous utilisons aujourd'hui.

Elle se généralise en Europe par les arabes vers l'an 1200 (on parle de chiffres arabes).

Bases de numération

La numération décimale (Base 10) est la base universelle du fait que nous l'utilisons tout le temps.
Elle fait appel à des principes fondamentaux que l'on retrouvera dans toutes les bases de calcul.

Premier principe :
Un nombre est constitué de chiffres qui pourront prendre une valeur comprise entre ‘0’ et ‘Base-1’ donc de ‘0’ à ‘9’ pour la numération décimale.

Bases de numération

La numération décimale (Base 10) est la base universelle du fait que nous l'utilisons tout le temps.
Elle fait appel à des principes fondamentaux que l'on retrouvera dans toutes les bases de calcul.

Deuxième principe :
En fonction de sa position dans le nombre chaque chiffre a une signification parfaitement définie.
Soit par exemple le nombre $A_{(10)} = 12041$

1 2 0 4 **1**

1 signifie que l'on a une fois l'unité.
1 signifie que l’on a dix mille fois l’unité.
Le système décimal est dit pondéré 1,10, 100, 1000, 10000, ….

Bases de numération

La numération décimale (Base 10) est la base universelle du fait que nous l'utilisons tout le temps.
Elle fait appel à des principes fondamentaux que l'on retrouvera dans toutes les bases de calcul.

Troisième principe :
Le zéro matérialise une position où il y a absence d'éléments.
On ne représentera donc que les zéros significatifs.

Bases de numération

En informatique industrielle, chaque signal n'ayant que 2 états possibles, on utilisera la numération en base deux (ou **numération binaire).**
Elle utilise deux symboles 0 et 1.
Cette base est très commode pour distinguer les 2 états logiques fondamentaux (vrai et faux).
Un état binaire est appelé **bit** (contraction de *binary digit*),
un bit prend les valeurs 0 ou 1**.**
On associera plusieurs bits pour constituer :

- un quartet 4 bits
- un octet 8 bits
- un mot 16 bits
- un mot double 32 bits
- un mot long 64 bits

Bases de numération

On écrit : A(2) = **1**001 011**1**

Les puissances successives de 2 (2^0, 2^1, 2^2,2^3, ….2^n...) sont appelées **poids binaires.**

Le système binaire est pondéré 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ….

Le bit de poids le plus fort est appelé **MSB** (***M**ost **S**ignificant **B**it*).

Le bit de poids le plus faible est appelé **LSB** (***L**ess **S**ignificant **B**it*).

Bases de numération

En base deux avec un nombre de *n* bits on peut avoir 2^n valeurs différentes :

- la valeur la plus petite est toujours 0,
- la valeur la plus grande correspond à (2^n-1).

Avec un octet on peut réaliser $2^8 = 256$ valeurs différentes
valeur minimum 0
valeur maximum $2^8-1 = 255$

UVSQ | ISTY
Institut des Sciences et Techniques des Yvelines
CAMPUS DE MANTES EN YVELINES
CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES
université PARIS-SACLAY

Correspondance entre les bases

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0															
0	1															
0	2															
0	3															
0	4															
0	5															
0	6															
0	7															
0	8															
0	9															
1	0															
1	1															
1	2															
1	3															
1	4															
1	5															

Correspondance entre les bases

Correspondance entre les bases

Système décimal

usuellement utilisé

il est pondéré

1 . 10 . 100 . 1000 …..

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0															
0	1															
0	2															
0	3															
0	4															
0	5															
0	6															
0	7															
0	8															
0	9															
1	0															
1	1															
1	2															
1	3															
1	4															
1	5															

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0											
0	1	0	0	0	1											
0	2	0	0	1	0											
0	3	0	0	1	1											
0	4	0	1	0	0											
0	5	0	1	0	1											
0	6	0	1	1	0											
0	7	0	1	1	1											
0	8	1	0	0	0											
0	9	1	0	0	1											
1	0	1	0	1	0											
1	1	1	0	1	1											
1	2	1	1	0	0											
1	3	1	1	0	1											
1	4	1	1	1	0											
1	5	1	1	1	1											

Système de numération

Correspondance entre les bases

Système binaire

- il est pondéré

1 . 2 . 4 . 8 …..

- il est auto-complémentaire

- il peut apparaître des combinaisons parasites **Aléas**

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0											
0	1	0	0	0	1											
0	2	0	0	1	0											
0	3	0	0	1	1											
0	4	0	1	0	0											
0	5	0	1	0	1											
0	6	0	1	1	0											
0	7	0	1	1	1											
0	8	1	0	0	0											
0	9	1	0	0	1											
1	0	1	0	1	0											
1	1	1	0	1	1											
1	2	1	1	0	0											
1	3	1	1	0	1											
1	4	1	1	1	0											
1	5	1	1	1	1											

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0				0							
0	1	0	0	0	1				1							
0	2	0	0	1	0				1							
0	3	0	0	1	1				0							
0	4	0	1	0	0				0							
0	5	0	1	0	1				1							
0	6	0	1	1	0				1							
0	7	0	1	1	1				0							
0	8	1	0	0	0				0							
0	9	1	0	0	1				1							
1	0	1	0	1	0				1							
1	1	1	0	1	1				0							
1	2	1	1	0	0				0							
1	3	1	1	0	1				1							
1	4	1	1	1	0				1							
1	5	1	1	1	1				0							

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0			0	0							
0	1	0	0	0	1			0	1							
0	2	0	0	1	0			1	1							
0	3	0	0	1	1			1	0							
0	4	0	1	0	0			1	0							
0	5	0	1	0	1			1	1							
0	6	0	1	1	0			0	1							
0	7	0	1	1	1			0	0							
0	8	1	0	0	0			0	0							
0	9	1	0	0	1			0	1							
1	0	1	0	1	0			1	1							
1	1	1	0	1	1			1	0							
1	2	1	1	0	0			1	0							
1	3	1	1	0	1			1	1							
1	4	1	1	1	0			0	1							
1	5	1	1	1	1			0	0							

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0		0	0	0							
0	1	0	0	0	1		0	0	1							
0	2	0	0	1	0		0	1	1							
0	3	0	0	1	1		0	1	0							
0	4	0	1	0	0		1	1	0							
0	5	0	1	0	1		1	1	1							
0	6	0	1	1	0		1	0	1							
0	7	0	1	1	1		1	0	0							
0	8	1	0	0	0		1	0	0							
0	9	1	0	0	1		1	0	1							
1	0	1	0	1	0		1	1	1							
1	1	1	0	1	1		1	1	0							
1	2	1	1	0	0		0	1	0							
1	3	1	1	0	1		0	1	1							
1	4	1	1	1	0		0	0	1							
1	5	1	1	1	1		0	0	0							

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1							
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1							
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0							
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0							
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1							
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1							
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0							
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0							
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1							
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1							
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0							
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0							
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1							
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1							
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0							

Système de numération

Correspondance entre les bases

Système binaire réfléchi « GRAY »

- il ne peut pas apparaître des combinaisons parasites

aucun risque d'Aléas

- il est auto-complémentaire

- **il n'est pas pondéré**

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0							
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1							
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1							
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0							
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0							
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1							
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1							
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0							
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0							
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1							
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1							
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0							
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0							
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1							
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1							
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0							

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1					
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	2					
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3					
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4					
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1	0	5					
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1	0	6					
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	7					
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0					
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1					
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2					
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	3					
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0	1	4					
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	5					
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6					
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	7					

Système de numération

Correspondance entre les bases

Système octal

- il est pondéré

1 . 8 . 64 . 512 …..

Peu utilisé aujourd’hui, il était utilisé dans les systèmes informatiques de première génération !

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0					
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1					
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	2					
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3					
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4					
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1	0	5					
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1	0	6					
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	7					
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0					
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1					
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2					
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	3					
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0	1	4					
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	5					
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6					
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	7					

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1				
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	2	2				
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3				
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4	4				
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1	0	5	5				
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1	0	6	6				
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	7	7				
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	8				
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	9				
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	A				
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	3	B				
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0	1	4	C				
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	5	D				
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6	E				
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	7	F				

Système de numération

Correspondance entre les bases

Système Hexadécimal

- il est pondéré

1 . 16 . 256 . 4096 …..

- Simplification du codage, avec un seul coefficient on indique la valeur d'un quartet

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0				
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1				
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	2	2				
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3				
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4	4				
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1	0	5	5				
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1	0	6	6				
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	7	7				
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	8				
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	9				
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	A				
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	3	B				
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0	1	4	C				
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	5	D				
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6	E				
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	7	F				

Correspondance entre les bases

Décimal		Binaire				GRAY				Octal		Hexa	DCB			
a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0	a_1	a_0	a_0	a_3	a_2	a_1	a_0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	1
0	2	0	0	1	0	0	0	1	1	0	2	2	0	0	1	0
0	3	0	0	1	1	0	0	1	0	0	3	3	0	0	1	1
0	4	0	1	0	0	0	1	1	0	0	4	4	0	1	0	0
0	5	0	1	0	1	0	1	1	1	0	5	5	0	1	0	1
0	6	0	1	1	0	0	1	0	1	0	6	6	0	1	1	0
0	7	0	1	1	1	0	1	0	0	0	7	7	0	1	1	1
0	8	1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	8	1	0	0	0
0	9	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	9	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	1	2	A				
1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	3	B				
1	2	1	1	0	0	1	0	1	0	1	4	C				
1	3	1	1	0	1	1	0	1	1	1	5	D				
1	4	1	1	1	0	1	0	0	1	1	6	E				
1	5	1	1	1	1	1	0	0	0	1	7	F				

Système de numération

Correspondance entre les bases

Système **D**écimal **C**odé **B**inaire « DCB »

- codage binaire des 10 premières valeurs du code décimal

- il est pondéré

1 . 2 . 4 . 8

- **il n'est pas auto-complémentaire**

UVSQ | ISTY

Institut des Sciences et Techniques des Yvelines

CAMPUS DE MANTES EN YVELINES

CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

université PARIS-SACLAY

Changement de base

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Soit un nombre de 4 chiffres A écrit dans un système de base B

$$A_{(B)} = a_3 \ a_2 \ a_1 \ a_0$$

Les coefficients sont dépendant du système utilisé.

$$0 < a_i < (B\text{-}1)$$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

$$A_{(B)} = a_3 \; a_2 \; a_1 \; a_0$$

$$A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

*** La base B doit être pondérée**

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code binaire (base 2) au code décimal (base 10)

$$\mathbf{A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0}$$

$\mathbf{A_{(2)}} = \mathbf{1011}$

$\mathbf{A_{(10)}} = ?$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code binaire (base 2) au code décimal (base 10)

$$\mathbf{A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0}$$

$$\mathbf{A_{(2)} = 1011}$$

$$\mathbf{A_{(10)}} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code binaire (base 2) au code décimal (base 10)

$$A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

$$A_{(2)} = 1011$$

$$A_{(10)} = 1.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0$$

$$A_{(10)} = 11$$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code octal (base 8) au code décimal (base 10)

$$A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

$A_{(8)} = 34$

$A_{(10)} = ?$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code octal (base 8) au code décimal (base 10)

$$\mathbf{A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0}$$

$$\mathbf{A_{(8)} = 34}$$

$$\mathbf{A_{(10)}} = \mathbf{3}.8^1 + \mathbf{4}.8^0$$

Changement de base

Passage d'une base « B » vers le système décimal

Passage du code octal (base 8) au code décimal (base 10)

$$A_{(10)} = a_3 B^3 + a_2 B^2 + a_1 B^1 + a_0 B^0$$

$$A_{(8)} = 34$$

$$A_{(10)} = 3.8^1 + 4.8^0$$

$$A_{(10)} = 28$$

Changement de base

Passage du système décimal vers une base « B »

Passage du code décimal (base 10) vers un autre code (base B)

- décimal vers binaire

$$A_{(10)} = 49$$

$$A_{(2)} = ?$$

Changement de base

Passage du système décimal vers une base « B »

Passage du code décimal (base 10) vers un autre code (base B)

- décimal vers binaire

$$\mathbf{A}_{(10)} = 49$$

$$\mathbf{A}_{(2)} = 110001$$

Changement de base

Passage du système décimal vers une base « B »

Passage du code décimal (base 10) vers un autre code (base B)

- décimal vers octal

$\mathbf{A}_{(10)} = \mathbf{49}$

$\mathbf{A}_{(8)} = ?$

Changement de base

Passage du système décimal vers une base « B »

Passage du code décimal (base 10) vers un autre code (base B)

- décimal vers octal

$$\mathbf{A}_{(10)} = 49$$

$$\mathbf{A}_{(8)} = 61$$

Exercice

$A_{(2)}$ = **1011 1100 0011 0100**

$A_{(10)}$ = ?

$A_{(16)}$ = ?

Exercice

$A_{(2)}$ = 1011 1100 0011 0100

$A_{(10)}$ = ?

A (10) = $2^{15} + 2^{13} + 2^{12} + 2^{11} + 2^{10} + 2^{5} + 2^{4} + 2^{2}$

A (10) = 32768 + 8192 + 4096 + 2048 + 1024 + 32 + 16 + 4

A (10) = 48180

Exercice

A $_{(2)}$ = **1011 1100 0011 0100**

A $_{(10)}$ = 48180

A $_{(16)}$ = ?

Exercice

A $_{(2)}$ **=** **1011 1100 0011 0100**

A $_{(10)}$ **=** 48180

A $_{(16)}$ **=** ?

$$
\begin{array}{r|l}
48180 & 16 \\
\hline
4 & 3011 \quad \begin{array}{|l} 16 \\ \hline \end{array} \\
 & \quad 3 \quad \begin{array}{|l} 188 \quad \begin{array}{|l} 16 \\ \hline \end{array} \\ \quad 12 \quad \begin{array}{|l} 11 \end{array} \end{array}
\end{array}
$$

C **B**

Exercice

$A_{(2)}$ = **1011 1100 0011 0100**

$A_{(10)}$ = 48180

$A_{(16)}$ = BC34

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = ?$

$A_{(8)} = ?$

$A_{(16)} = ?$

$A_{(DCB)} = ?$

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = ?$

928 | 2
0 | 464 | 2
0 | 232 | 2
0 | 116 | 2
0 | 58 | 2
0 | 29 | 2
1 | 14 | 2
0 | 7 | 2
1 | 3 | 2
1 | 1

Exercice

A $_{(10)}$ **= 928**

A $_{(2)}$ **= 11 1010 0000**

928 | 2
0 | 464 | 2
0 | 232 | 2
0 | 116 | 2
0 | 58 | 2
0 | 29 | 2
1 | 14 | 2
0 | 7 | 2
1 | 3 | 2
1 | 1

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = ?$

$A_{(16)} = ?$

$A_{(DCB)} = ?$

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = ?$

$$
\begin{array}{r|l}
928 & 8 \\ \hline
0 & 116 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
116 & 8 \\ \hline
4 & 14 \\
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
14 & 8 \\ \hline
6 & 1 \\
\end{array}
$$

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = 1640$

$A_{(16)} = ?$

$A_{(DCB)} = ?$

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = 1640$

$A_{(16)} = ?$

$$
\begin{array}{r|l}
928 & 16 \\ \hline
0 & \begin{array}{r|l} 58 & 16 \\ \hline 10 & 3 \end{array}
\end{array}
$$

A

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = 1640$

$A_{(16)} = 3A0$

$A_{(DCB)} = ?$

Exercice

$A_{(10)} = 928$

$A_{(2)} = 11\ 1010\ 0000$

$A_{(8)} = 1640$

$A_{(16)} = 3A0$

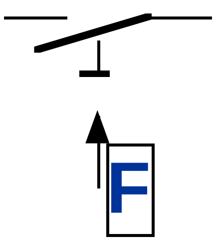
$A_{(DCB)} = 1001\ 0010\ 1000$

UVSQ | ISTY
Institut des Sciences et Techniques des Yvelines
CAMPUS DE MANTES EN YVELINES
CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES
université PARIS-SACLAY

Variable
et
Opérateurs Booléens

Variable Booléenne

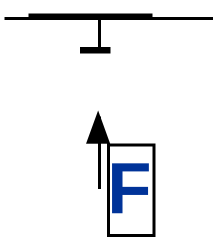
Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.



action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique
F = 0	ouvert	0

Variable Booléenne

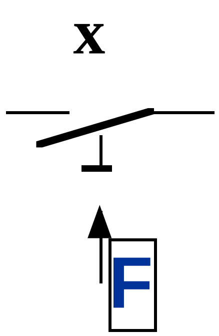
Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.



action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique
F = 0	ouvert	0
F = 1	fermé	1

Variable Booléenne

Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.



action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique
F = 0	ouvert	0
F = 1	fermé	1

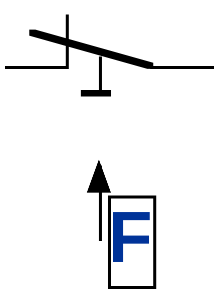
élément travail

Variable Booléenne

Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.

action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique
F = 0	ouvert	0
F = 1	fermé	1
F = 0	fermé	1

élément travail

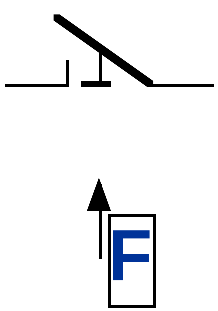


Variable Booléenne

Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.

action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique
F = 0	ouvert	0
F = 1	fermé	1
F = 0	fermé	1
F = 1	ouvert	0

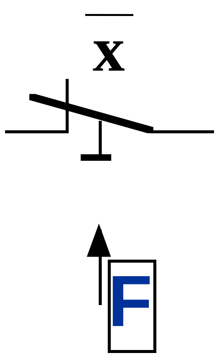
élément travail



Variable Booléenne

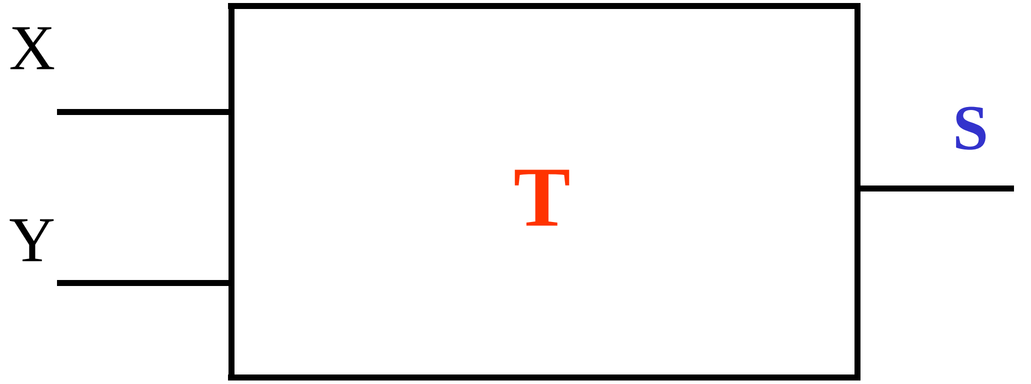
Une variable Booléenne est logique , elle ne peut prendre que deux états 0 ou 1.

action extérieure (physique)	état technologique	ètat logique	
F = 0	ouvert	0	élément travail
F = 1	fermé	1	
F = 0	fermé	1	élément repos
F = 1	ouvert	0	



Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables



Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

T_1	S = 0	Générateur de 0
$T_{16} = \overline{T_1}$	S = 1	Générateur de 1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

T_2	$S = X \cdot Y$	ET
$T_{15} = \overline{T_2}$	$S = \overline{X \cdot Y}$	ET NON - NAND

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

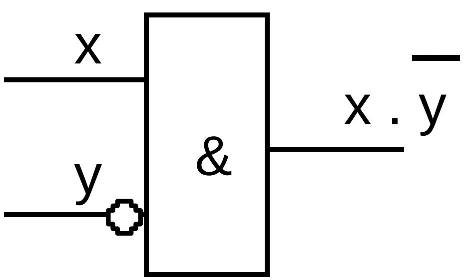
Opérateurs Booléens

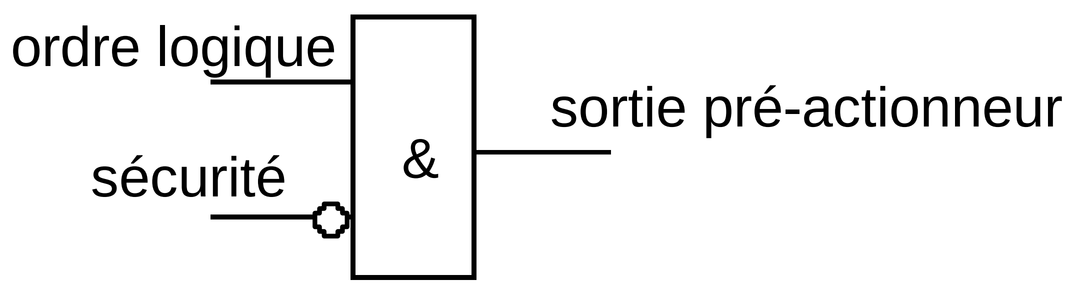
Opérateurs sur deux variables

$\mathbf{T}_3$ $S = X \cdot \overline{Y}$

$\mathbf{T}_5$ $S = \overline{X} \cdot Y$

Inhibition





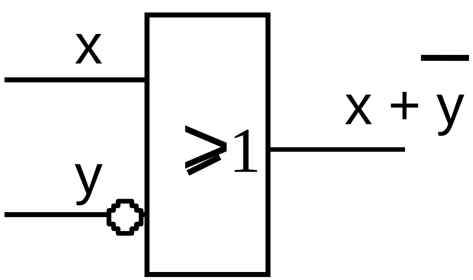
Opérateurs Booléens

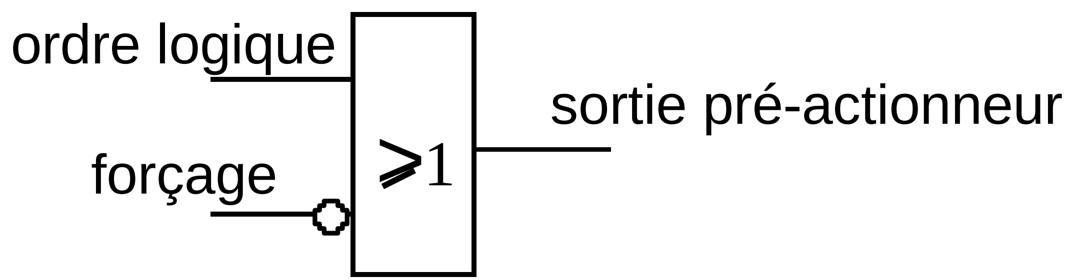
Opérateurs sur deux variables

$$T_{14} = \overline{T_3} \qquad S = \overline{X \cdot \overline{Y}} = \overline{X} + Y$$

$$T_{12} = \overline{T_5} \qquad S = \overline{\overline{X} \cdot Y} = X + \overline{Y}$$

Implication





Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

T_4 $S = X$

T_6 $S = Y$

Transfert - « OUI »

$T_{13} = \overline{T_4}$ $S = \overline{X}$

$T_{11} = \overline{T_6}$ $S = \overline{Y}$

Inverseur - « NON »

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

T_7 $S = X . \overline{Y} + \overline{X} . Y$ OU exclusif – XOR

$S = X \oplus Y$

$T_{10} = \overline{T_7}$ $S = X . Y + \overline{X} . \overline{Y}$ Identité – XNOR

$S = X \odot Y$

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

X	Y	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Opérateurs Booléens

Opérateurs sur deux variables

T_8 $S = X + Y$ OU

$T_9 = \overline{T_8}$ $S = \overline{X + Y}$ OU NON - NOR

UVSQ | ISTY

Institut des Sciences et Techniques des Yvelines

CAMPUS DE MANTES EN YVELINES

CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

université PARIS-SACLAY

Représentation des opérateurs booléens

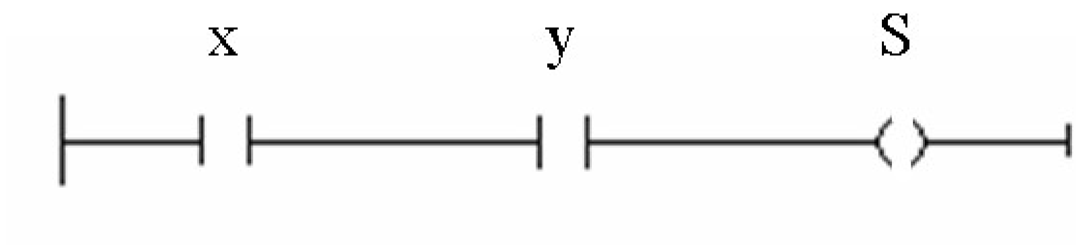
Représentation des opérateurs

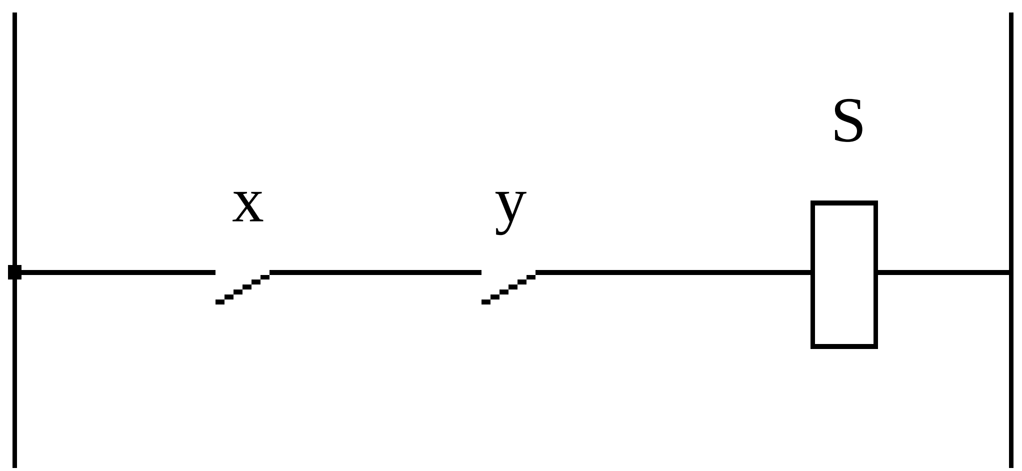
Réseaux logiques à contacts

« Ladder diagram»

Opérateur ET

S = X . Y





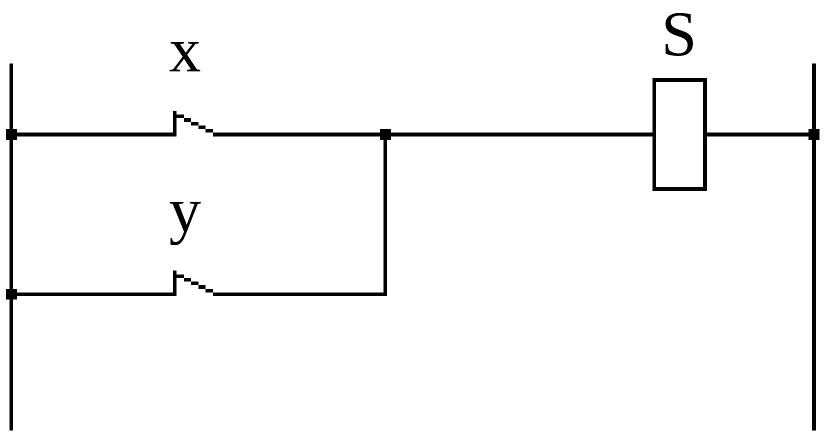
Représentation des opérateurs

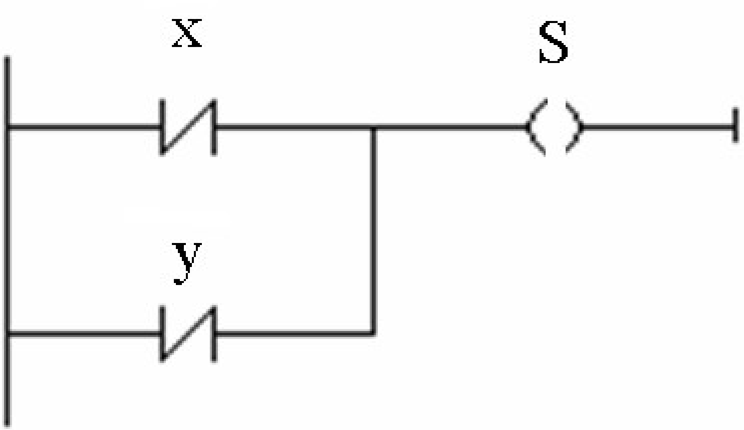
Réseaux logiques à contacts

« Ladder diagram»

Opérateur NAND

$S = \overline{X \cdot Y} = \overline{X} + \overline{Y}$

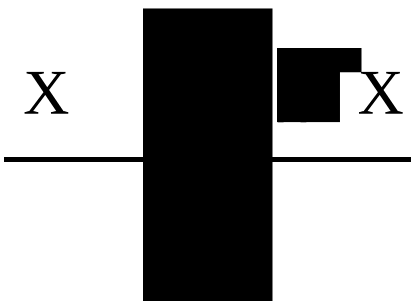




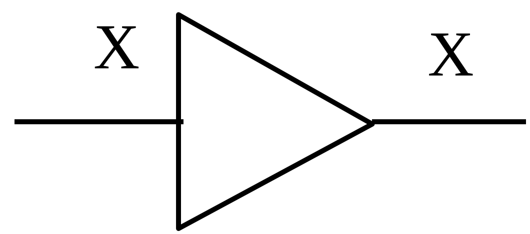
Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

Transfert « OUI »



Norme AFNOR

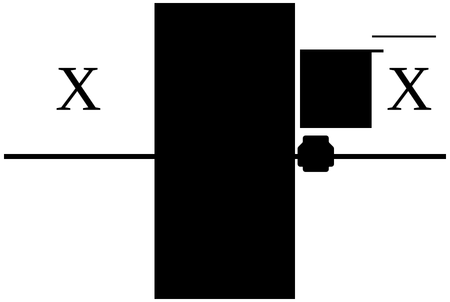


Norme IEEE

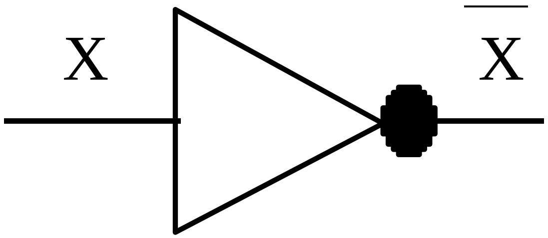
Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

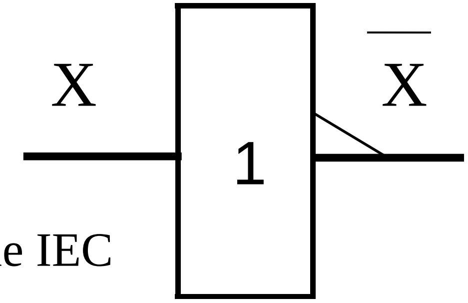
Inverseur - « NON » - « PAS »



Norme AFNOR



Norme IEEE

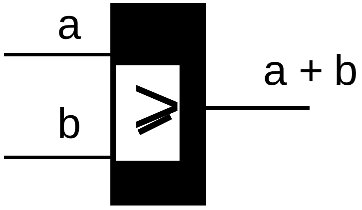


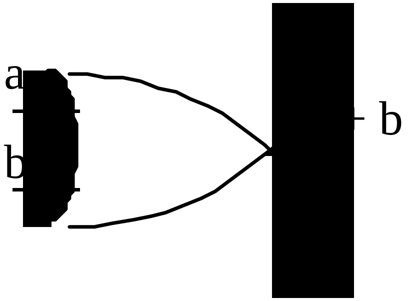
Norme IEC

Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

OU

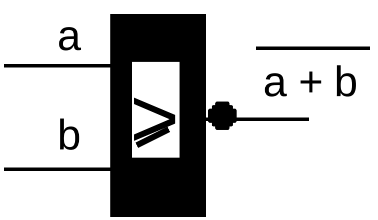


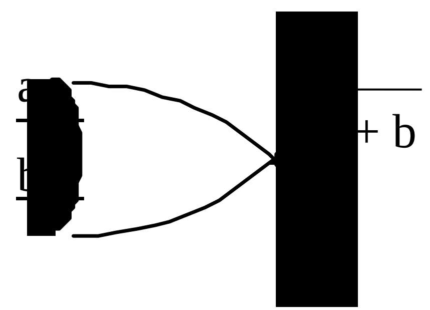


Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

NOR- « OU NON »

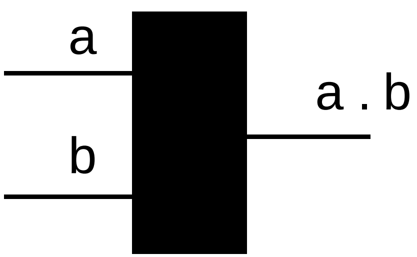


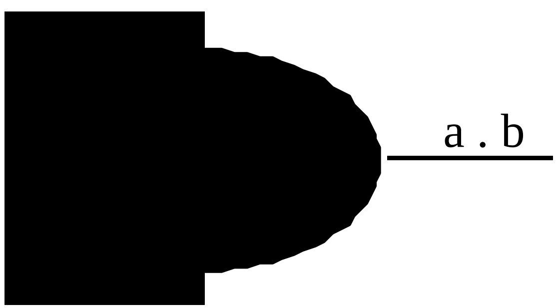


Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

ET

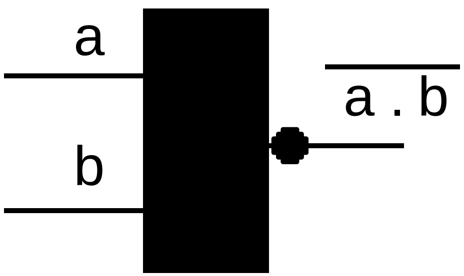


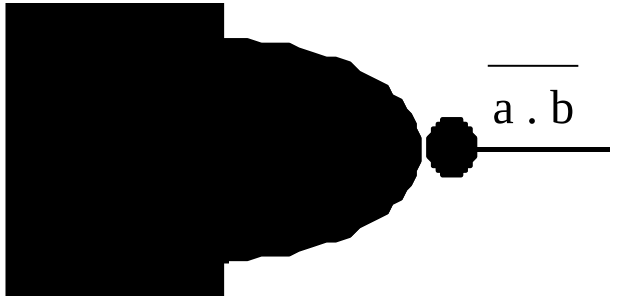


Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

NAND – « ET NON »

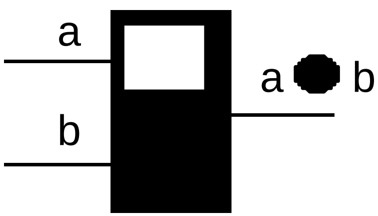


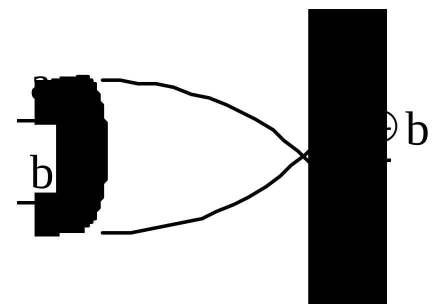


Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

XOR – « OU exclusif »

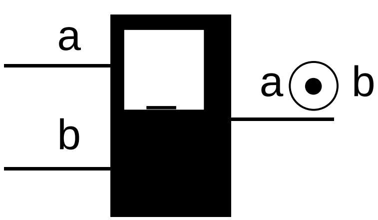


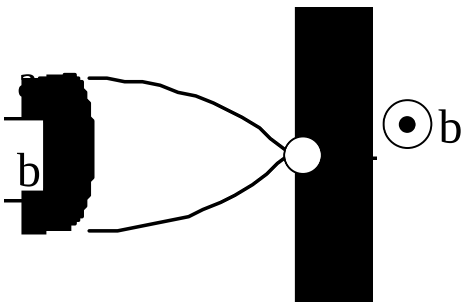


Représentation des opérateurs

Diagrammes logiques

XNOR – « Identité »

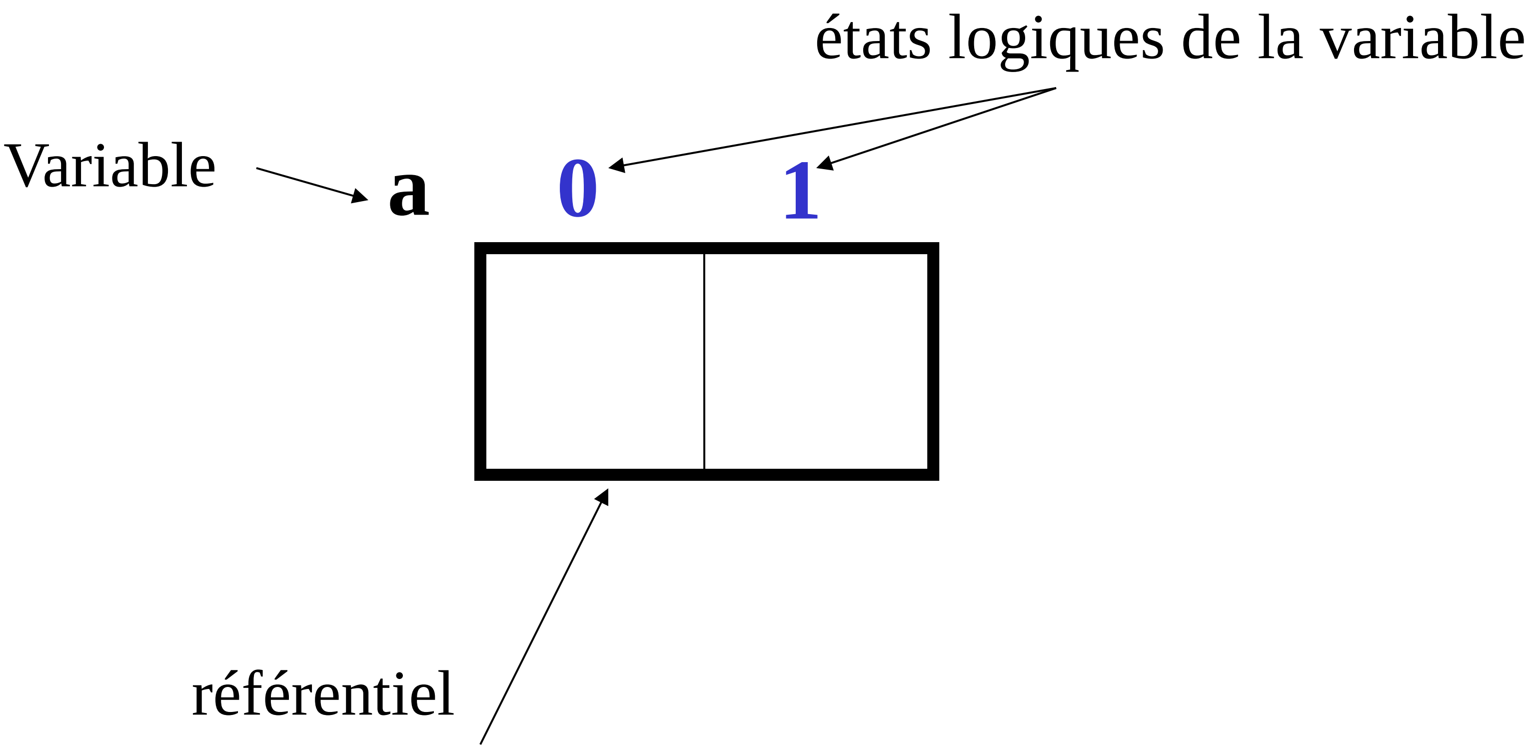




Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 1 variable



Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 2 variables

b \ a	0	1
0		
1		

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 2 variables

Code de GRAY

c \ b a	00	01	11	10
0				
1				

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 4 variables

Code de GRAY

Code de GRAY

dc \ b a	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

UVSQ | ISTY
Institut des Sciences et Techniques des Yvelines
université PARIS-SACLAY
CAMPUS DE MANTES EN YVELINES
CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

Fonctions booléennes
représentation - simplification

Fonctions booléennes

Définition

On appelle fonction booléenne, une fonction de "n" variables booléennes définies dans l'ensemble (0 - 1).
Comme les variables, la fonction ne peut donc prendre que deux états possibles 0 ou 1.

Fonctions booléennes

Définition

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$	$F_2 = f\ (a,b,c)$
c	b	a		
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**0**	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	**0**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**1**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**	**X**
1	**1**	**1**	**1**	**X**

Fonctions booléennes

Représentation

Ecriture canonique

F1 = ?

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$
c	b	a	
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

La première forme canonique est une réunion de mintermes

Fonctions booléennes

Représentation

Ecriture canonique

$F1 = \overline{\overline{F1}} = ?$

F1 = // F1 = (a + b + c) . (/a + b + c) . (a + /b + c)

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$
c	b	a	
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

La deuxième forme canonique est un produit de maxtermes

Fonctions booléennes

Représentation

Rectangles de Karnaugh

c \ b a	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	1	1	1

F1

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$
c	b	a	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Fonctions booléennes

Représentation

Rectangles de Karnaugh

c \ b a	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	X	X

F2

variables			F_1= f (a,b,c)	F_2= f (a,b,c)
c	b	a		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	X
1	1	1	1	X

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation numérique

F1 = **R** (3, 4, 5, 6, 7)

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$	$F_2 = f\ (a,b,c)$
c	b	a		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	X
1	1	1	1	X

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation numérique

F2 = **R** (0, 2, 4, 5) **R**$_X$ (6, 7)

variables			F_1= f (a,b,c)	F_2= f (a,b,c)
c	b	a		
0	0	0	0	1
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	1	X
1	1	1	1	X

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 1 variable

a	0	1
	0	1

équivalents décimaux

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 2 variables

b \ a	0	1
0	0	1
1	2	3

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 2 variables

c \ b a	00	01	11	10
0	0	1	3	2
1	4	5	7	6

Représentation des opérateurs

Tableaux de karnaugh

Avec 4 variables

dc \ b a	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

variables			$F_1 = f(a,b,c)$
c	b	a	
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

Utilisation possible de tous les opérateurs booléens

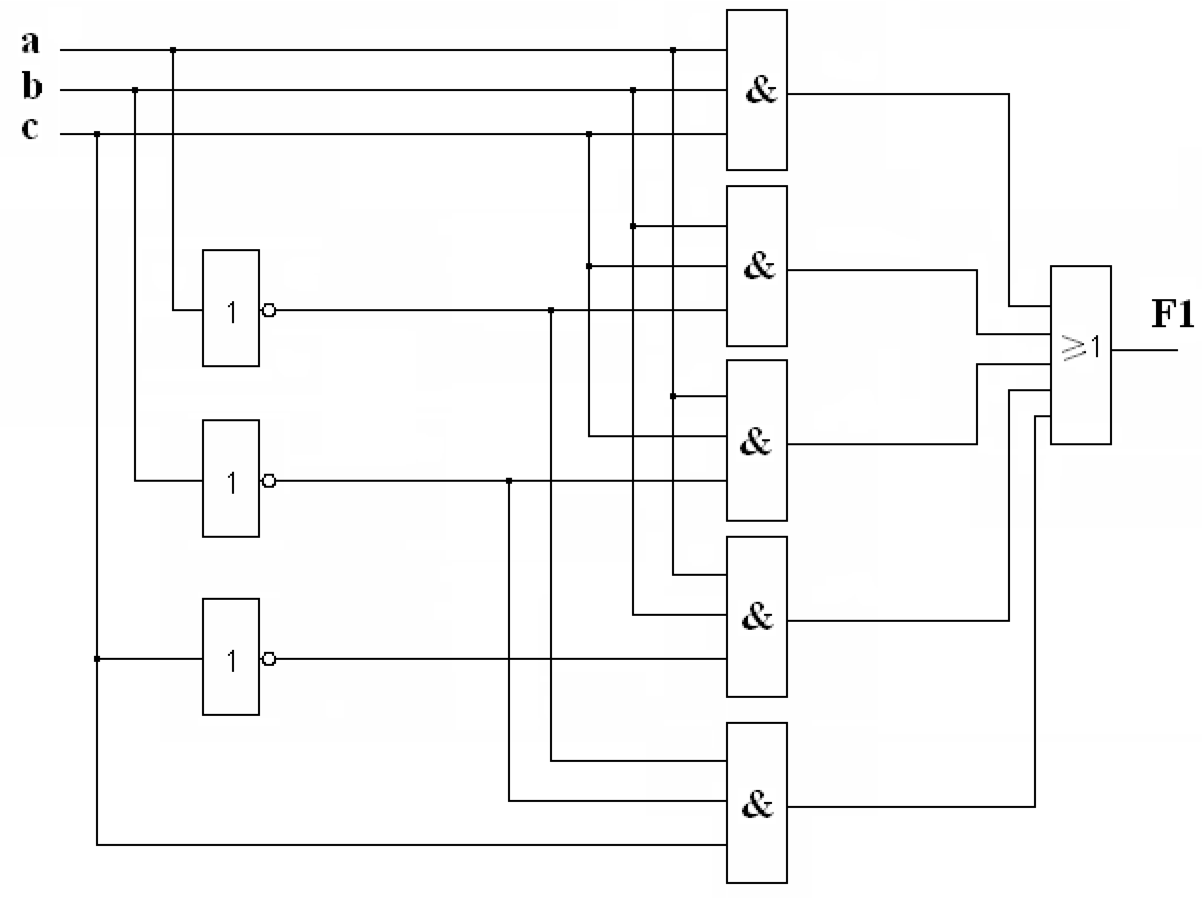
F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c



Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

Utilisation uniquement d'opérateurs NAND

variables			$F_1 = f\ (a,b,c)$
c	b	a	
0	**0**	**0**	**0**
0	**0**	**1**	**0**
0	**1**	**0**	**0**
0	**1**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**
1	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**1**
1	**1**	**1**	**1**

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme avec des opérateurs NAND

1er étape:
La fonction doit être écrite sous la première forme canonique (somme de termes), si ce n'est pas le cas il faut complémenter et appliquer le théorème de Morgan.

2^{em} étape:
Utiliser un opérateur NAND avec un nombre d'entrées égal au nombre de termes de la somme.

3^{em} étape:
Mettre sur les entrées de l'opérateur NAND le complément de chaque terme de la somme.

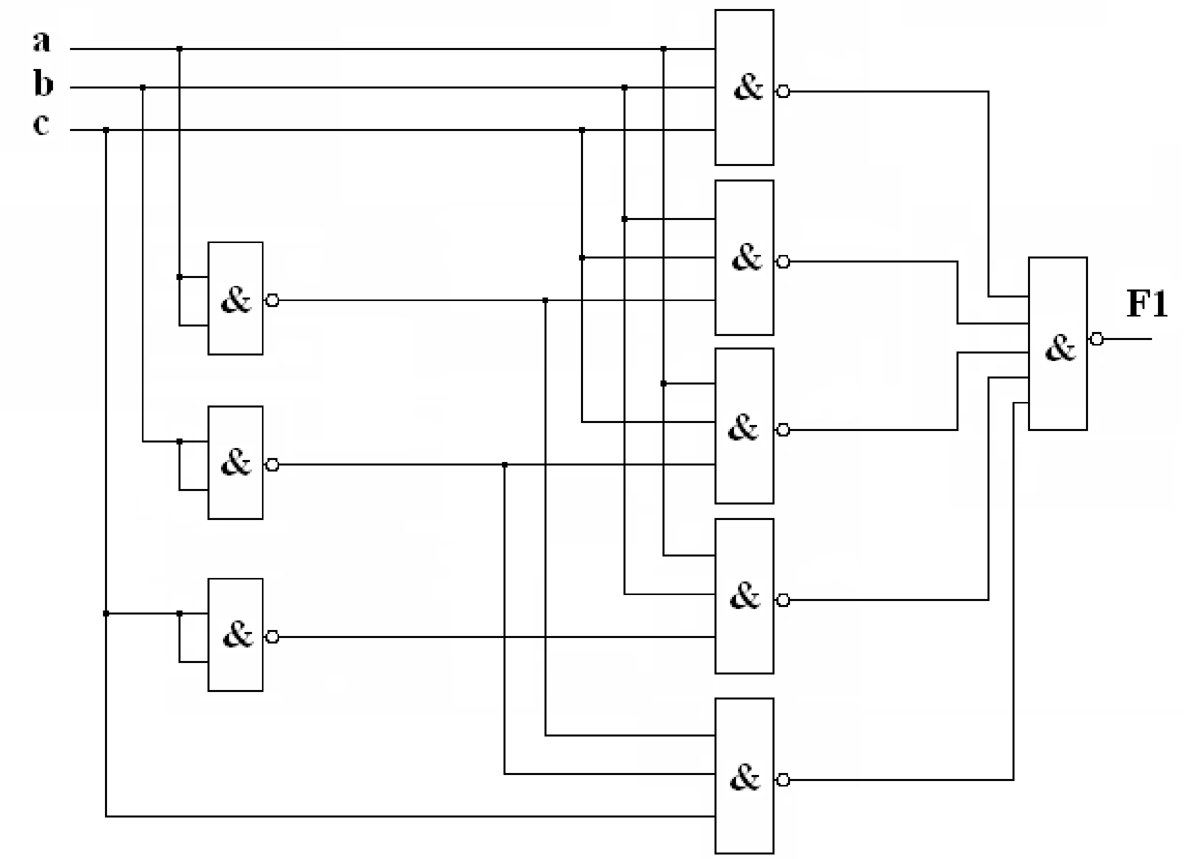
Recommencer les 3 étapes autant que nécessaire !

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c



Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

variables			$F_1 = f\,(a,b,c)$
c	b	a	
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Utilisation uniquement d'opérateurs NOR

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme avec des opérateurs NOR

1er étape:
La fonction doit être écrite sous la deuxième forme canonique (produit de facteurs), si ce n'est pas le cas il faut complémenter et appliquer le théorème de Morgan.

2em étape:
Utiliser un opérateur NOR avec un nombre d'entrées égal au nombre de facteurs du produit.

3em étape:
Mettre sur les entrées de l'opérateur NOR le complément de chaque facteur du produit.

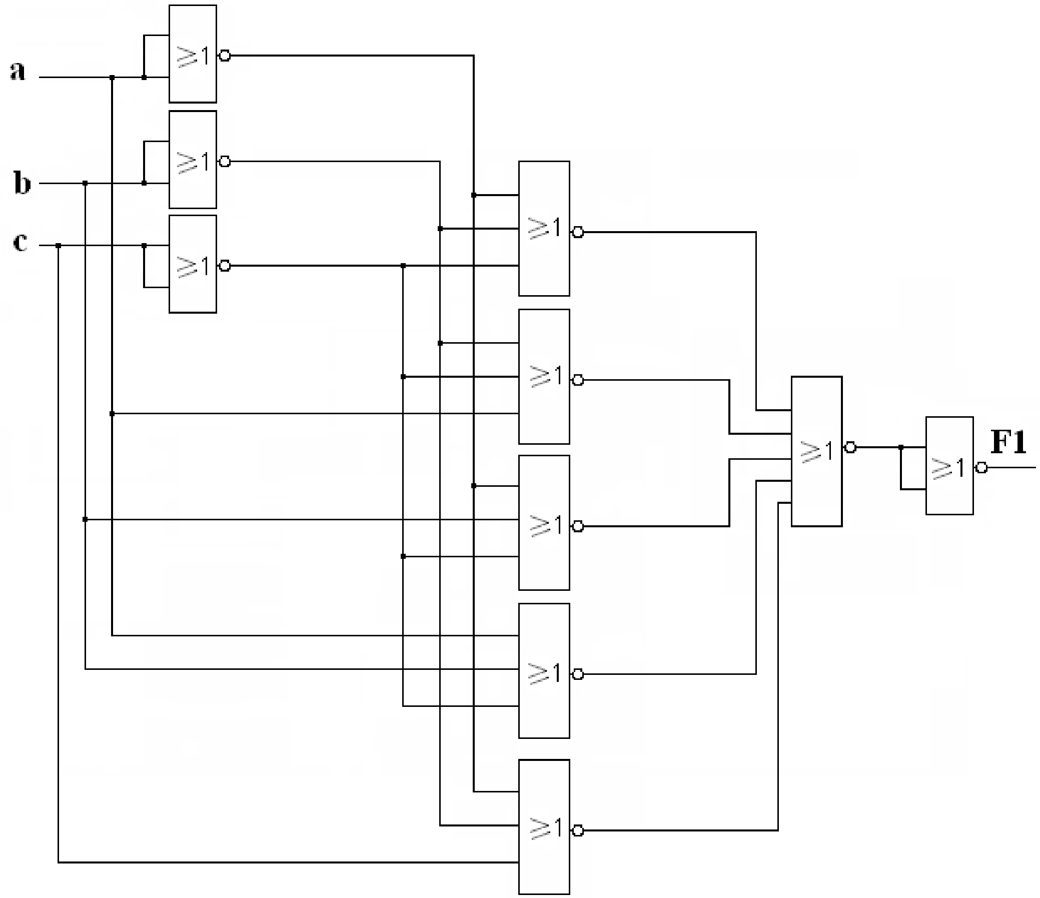
Recommencer les 3 étapes autant que nécessaire !

Fonctions booléennes

Représentation

Représentation par logigramme

F1 = a b /c + /a /b c + a /b c + /a b c + a b c



Fonctions booléennes

Simplification

On va rechercher la formule la plus condensée, avec le moins de symboles, donc conduisant à une réalisation matérielle plus compacte.

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification Algébrique

Principaux postulats de l'algèbre de BOOLE

- Fonction d'une variable avec 0, 1, elle-même:

$x + 0 = x$	$x \,.\, 0 = 0$
$x + 1 = 1$	$x \,.\, 1 = x$
$x + x = x$	$x \,.\, x = x$

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification Algébrique

Principaux postulats de l'algèbre de BOOLE

• Propriété d'une fonction avec son complément :

$x + \overline{x} = 1$ $\qquad$ $x \cdot \overline{x} = 0$

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification Algébrique

Principaux postulats de l'algèbre de BOOLE

• Théorème de MORGAN

Le complément d'une somme logique est égal au produit de chaque terme complémenté.

$$\overline{X + Y} = \overline{X} \, . \, \overline{Y}$$

Le complément d'un produit logique est égal à la somme de chaque terme complémenté.

$$\overline{X \, . \, Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification Algébrique

La simplification algébrique repose sur beaucoup d'astuce, au-delà de trois variables cette méthode est pratiquement impossible à mettre en œuvre on peut :

- supprimer les associations de variables multiples,
- mettre en facteur pour faire apparaître des termes complémentaires,
- mettre en facteur pour faire apparaître des termes inclus,
- ajouter une expression qui figure déjà .

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification Algébrique

$$F_1 = a\,b\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,c + a\,b\,\bar{c}$$

$$F_2 = a\,b + a\,\bar{b} + a\,c + a\,\bar{c}$$

$$F_3 = (a + b) \,.\, (a + \bar{b})$$

$$F_4 = a\,b\,c + \bar{a}\,b\,c + a\,\bar{b}\,\bar{c} + a\,b\,\bar{c}$$

$$F_5 = a\,b\,c + a\,b\,\bar{c} + a\,\bar{b}\,c$$

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par les rectangles de Karnaugh

La simplification par les rectangles de KARNAUGH est graphique:

1) On transporte la table de vérité dans un rectangle de Karnaugh.

2) On réalise les groupements possibles de 1 - 2 - 4 - 8 termes en recherchant à avoir le minimum de groupements (le nombre des cases regroupées doit correspondre à une puissance de 2).

3) Dans chaque groupement ainsi formé on élimine les termes qui changent d'état, (le nombre des termes éliminés doit correspondre à la puissance de 2 du groupement).

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par les rectangles de Karnaugh

$F_6 = \mathrm{R}\ (1,3,7)$

$F_7 = \mathrm{R}\ (1,2,5,6,7,9,10,11,13,14,15)$

$F_8 = \mathrm{R}\ (1,5,8,10,14)\ \mathrm{R}_x (11,12,15)$

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par les rectangles de Karnaugh

$F_6 = \mathrm{R}\ (1,3,7)$

c \ b a	00	01	11	10
0	0 [0]	1 [1]	1 [3]	0 [2]
1	0 [4]	0 [5]	1 [7]	0 [6]

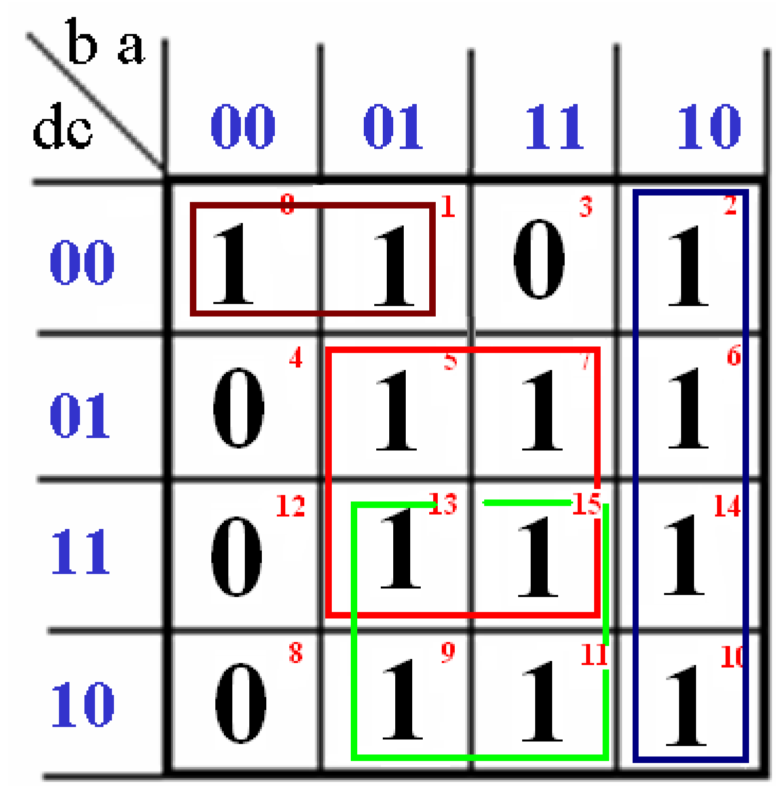
F6 = a /c + ab

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par les rectangles de Karnaugh

$F_7 =$ R (1,2,5,6,7,9,10,11,13,14,15)



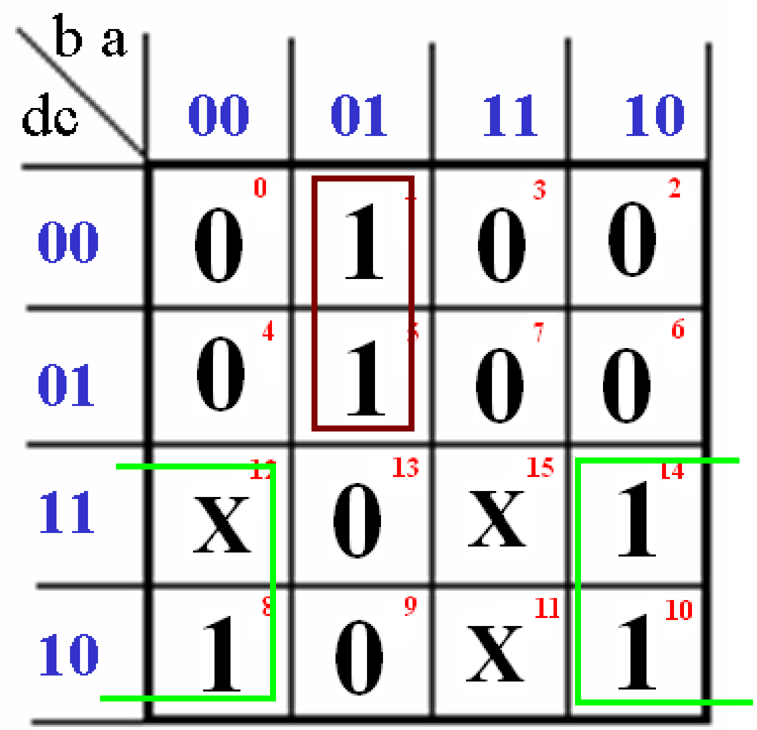
F7 = /a b + a (c + d) + /b /c /d

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par les rectangles de Karnaugh

$F_8 = \mathrm{R}\ (1,5,8,10,14)\ \mathrm{R}_x\ (11,12,15)$



F8 = a /b /d + /a d

Fonctions booléennes

Simplification

Simplification par méthodes algorithmiques

Des algorithmes de simplification des fonctions Booléennes ont été développés pour des fonctions à plus de six variables.
Méthode de QUINE MAC CLUSKEY.

Fonctions booléennes

exercice

Le bon fonctionnement d'un processus industriel est lié pour des raisons de sécurité à un paramètre (température par exemple) qui doit rester en dessous d'un certain seuil.
Si ce paramètre est surveillé par un seul capteur et si l'arrêt du processus est coûteux on ne peut pas prendre le risque d'arrêter sur avarie du capteur.
On utilise donc simultanément trois capteurs et on regarde si les informations sont concordantes:

- Le processus fonctionnera si une majorité d'informations correctes se dégage,
- Toute discordance sera signalée.

Travail demandé

1) équation de voyant "fonctionnement incorrect".
2) équation du voyant "défaut capteur n°1".
3) équation du voyant "défaut capteur n°2".
4) équation du voyant "défaut capteur n°3".
5) schéma du système en utilisant :
    - uniquement des fonctions NAND,
    - uniquement des fonctions NOR.

Fonctions booléennes

exercice

c	b	a	fonctionnement incorrect	défaut capteur a	défaut capteur b	défaut capteur c
0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	1
1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

c \ b a	00	01	11	10
0	0	1	0	0
1	0	0	0	1

Da = a /b /c + /a b c

c \ b a	00	01	11	10
0	0	0	0	1
1	0	1	0	0

Db = a /b c + /a b /c

c \ b a	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Dc = a b /c + /a /b c

c \ b a	00	01	11	10
0	0	0	1	0
1	0	1	1	1

Fi = a b + ac + b c

UVSQ | ISTY

université PARIS-SACLAY

Institut des Sciences et Techniques des Yvelines

CAMPUS DE MANTES EN YVELINES

CAMPUS DE SAINT-QUENTIN-EN-YVELINES

Fin