

La Machine à Courant Continu : MCC

La machine à courant continu est une machine avec énormément d'avantages :

- Machine réversible : Moteur ou Générateur
- Couple important au démarrage
- en moteur : Variation de la vitesse par la variation de U ou de $I_{excitation}$
- en génératrice : variation de E par la variation de N ou de $I_{excitation}$

Elle est utilisée dans les voitures (démarreur, ventilateurs, lève-vitre, orientation des rétroviseurs, essuie-glace, pompes diverses...)

La machine à courant continu présente les inconvénients suivants :

- Usure des balais
- Usure des collecteurs
- N'apprécie pas les atmosphères polluée, abrasive, explosive ou humide,
- Coût important
- Encombrement et masse plus importante

Nous allons étudier la MCC avec une excitation indépendante.

La 1ère partie permet de déterminer les éléments de son schéma équivalent.

La 2nde partie permet de valider le modèle équivalent de la MCC par une comparaison mesure/théorie en charge.

Rappel :

La machine à courant continu est constituée principalement de deux parties (figure 1) :

- Un circuit inducteur situé sur la partie fixe de la machine (le stator).
- Un circuit induit situé sur la partie en rotation de la machine (le rotor).

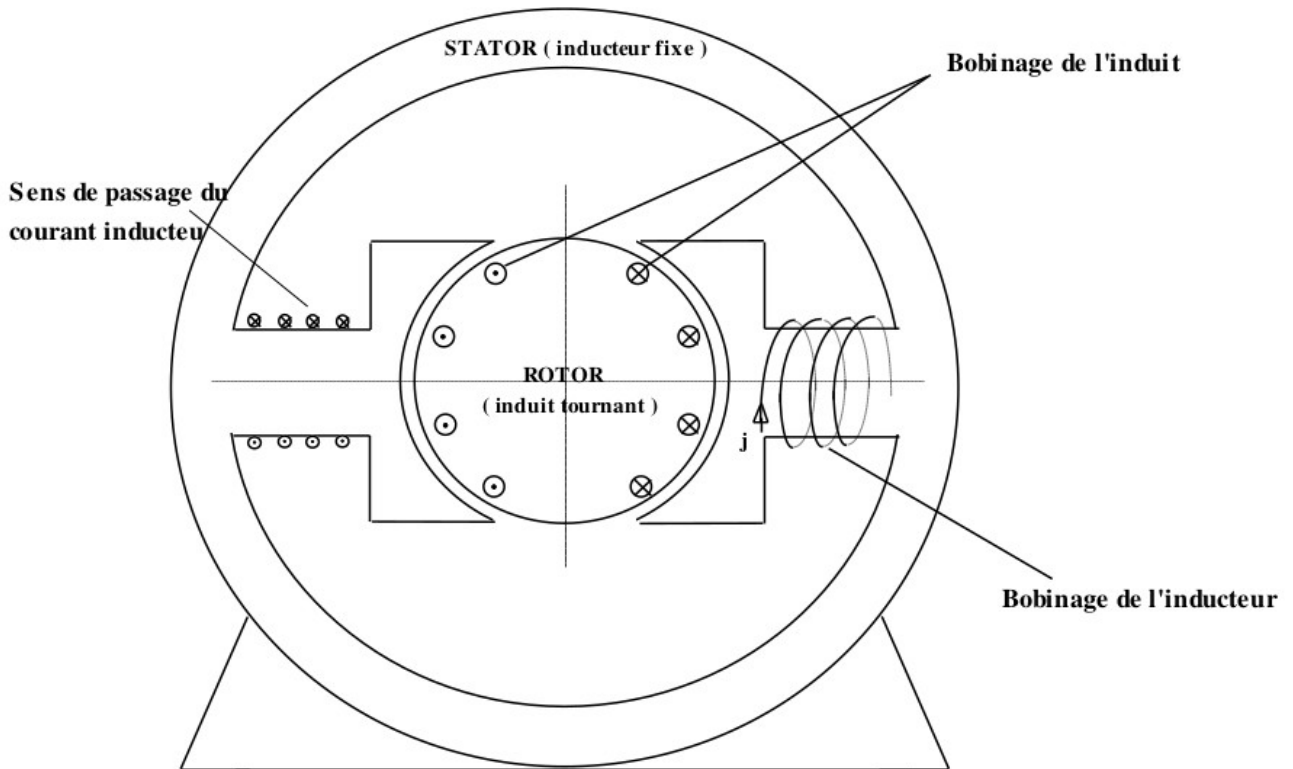


Figure 1 : Coupe schématique d'une machine à courant continu

Attention, parfois le stator tourne et le rotor est fixe : cas de certains ventilateurs.

Fonctionnement en moteur :

- Le circuit inducteur est parcouru par un courant continu I_e qui va créer une induction fixe B_s dans l'entrefer de la machine (partie située entre le stator et le rotor).
- Entre les deux bornes du circuit induit, on applique une tension continue E qui va faire circuler un courant continu I dans les bobinages du circuit induit. Les courants de l'induit font apparaître une seconde induction B_r à 90° de B_s .
→ L'interaction des deux champs crée un couple : $C_e = m \wedge B_s = k \cdot B_r \wedge B_s$

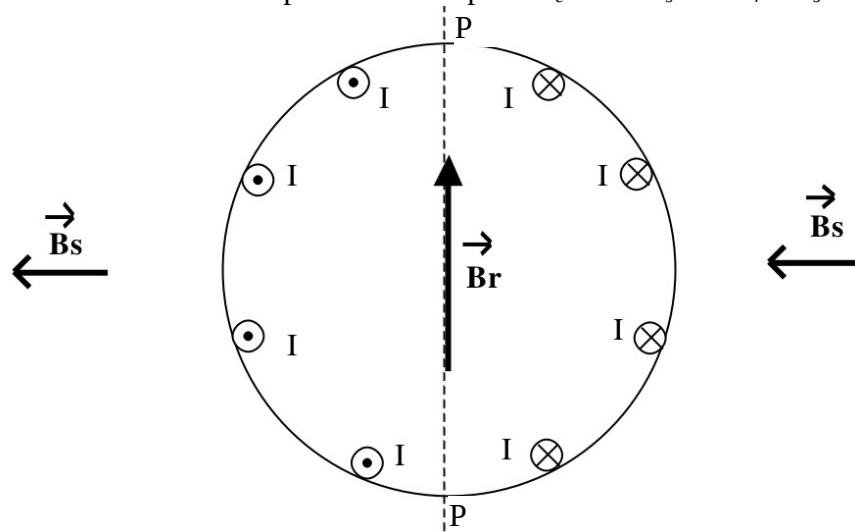


Figure 2 : Champ B_r sur le circuit induit

Si les courants parcourant les conducteurs de l'induit sont toujours dans le même sens à droite du plan P et dans le sens inverse à gauche de ce plan (figure 2), le champ B_r garde toujours la même direction et le même sens. La valeur moyenne du couple électromagnétique C_e (en N.m) est non nulle, et le moteur entre en rotation avec une vitesse angulaire notée Ω (en rad/s).

Le dispositif permettant d'imposer le sens de circulation des courants induits est un commutateur mécanique formé de balais et d'un collecteur (demander à l'enseignant de le montrer).

Un dispositif de conversion d'énergie électrique (tension E et courant d'induit I) en énergie mécanique (couple C_e et vitesse de rotation Ω) a été réalisé.

Le collecteur



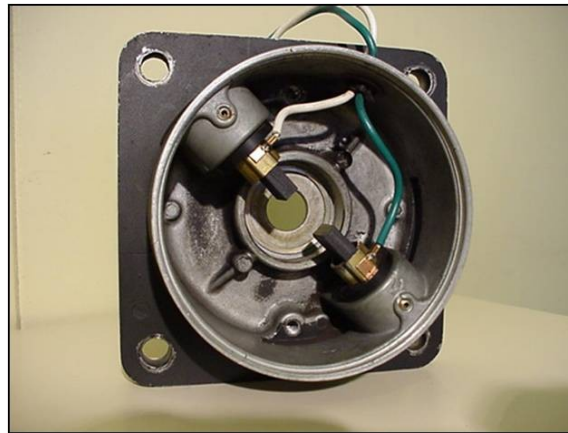
Le collecteur (mobile avec le rotor), c'est un anneau formé de lames de cuivre isolées sur lesquelles frottent des balais. De ces balais en graphite partent les fils qui assurent la liaison électrique entre le rotor et l'extérieur de la machine.

Le collecteur a pour fonction d'assurer la commutation du courant d'alimentation dans les conducteurs de l'induit. Il est essentiellement constitué par une juxtaposition cylindrique de lames

de cuivre séparées par des lames isolantes. Chaque lame est reliée électriquement au bobinage induit.

Le collecteur est le constituant critique des machines à courant continu car ses lames sont soumises aux efforts centrifuge et assemblées manuellement. Son usure consécutive du frottement des balais nécessite un démontage et un ré-usinage périodiques. De plus, il accroît de 20 à 30% la longueur totale de la machine.

Les balais



Les balais assurent la liaison électrique (contact glissant) entre la partie fixe et la partie tournante. Pour des machines de forte puissance, la mise en parallèle des balais est alors nécessaire. Pour des raisons d'économie, ils doivent avoir une durée de vie aussi longue que possible et assurer un bon contact électrique. Différentes technologies existent : les balais au charbon dur, les graphitiques, les électro-graphitiques, et les métallographitiques. On peut considérer que dans un contact glissant les pertes sont de nature mécanique à 35% et de nature électrique à 65%.

Fonctionnement en génératrice

Le fonctionnement en génératrice correspond à une conversion d'énergie mécanique (couple-vitesse de rotation) en énergie électrique (tension continue E - courant d'induit I si le circuit n'est pas ouvert).

La machine est donc entraînée en rotation (à l'aide d'un moteur à courant continu dans la manipulation).

Si le circuit inducteur est alimenté par un courant continu I_e , il apparaît une induction B_s dans l'entrefer de la machine. Le rotor étant en rotation, il y a une variation de flux à travers les "cadres" formés par les conducteurs de l'induit (figure 3). Cette variation de flux fait apparaître des forces électromotrices données par la loi de Faraday ($e = -\frac{d\Phi}{dt}$). La somme de toutes ces forces

électromotrices donne une tension moyenne non nulle notée E que l'on nomme f.e.m. pour force électromotrice.

Si le circuit induit est refermé sur une charge (résistive par exemple), il y a naissance d'un courant I dans les conducteurs du rotor.

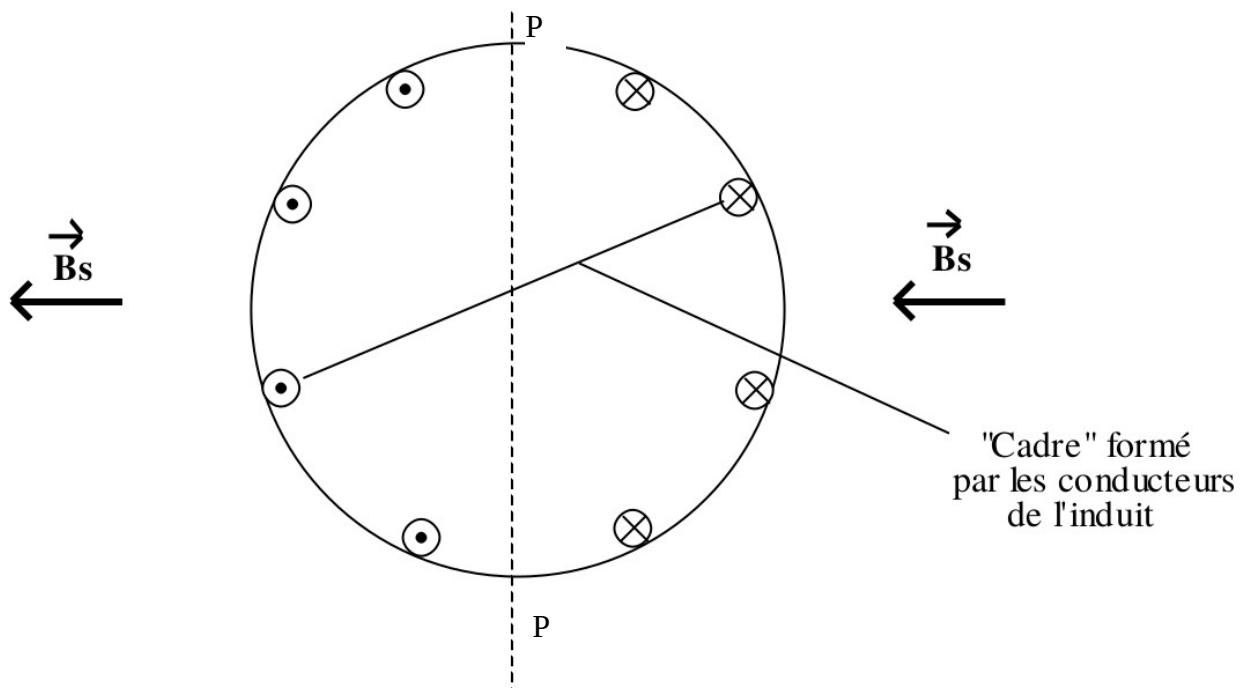


Figure 3 : Rotor d'une génératrice à courant continu débitant sur une charge

Schémas équivalents de la machine à courant continu

Moteur à courant continu

Comme nous l'avons dit précédemment, le fonctionnement en moteur correspond à une conversion d'énergie électrique en énergie mécanique. L'énergie électrique est donc absorbée par la machine ce qui correspond à un schéma électrique équivalent récepteur. Les conducteurs de ce circuit ayant une certaine résistance R , celle-ci intervient dans le schéma équivalent provoquant une chute de tension et des pertes par effet Joule.

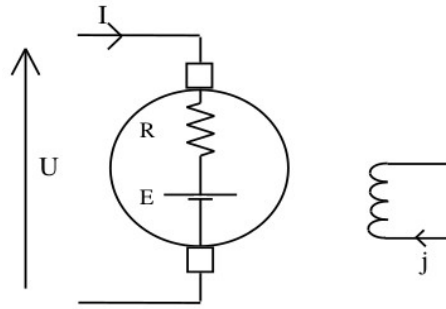


Figure 4 : Schéma équivalent du moteur (convention récepteur)

Les équations régissant le fonctionnement de la machine à courant continu en moteur sont :

(1)- L'équation donnée par le schéma équivalent de l'induit : $U=E+R.I$.

(2)- Si on calcule le couple électromagnétique, on obtient : $C_e=K. \Phi .I$.

Avec Φ , le flux crée par le circuit inducteur (donc I_e), et K constante dépendant des paramètres de la machine.

(3)- La puissance électromagnétique du côté électrique se transmet intégralement sous forme mécanique : $P=E.I=C_e.\Omega$ avec Ω la vitesse angulaire en rad/s.

(4)-Des deux équations précédentes, on déduit la valeur de la fem E : $E=K.\Phi. \Omega$

Génératrice à courant continu.

Le transfert d'énergie se fait dans le sens inverse du moteur (mécanique \rightarrow électrique). Il y a donc création de puissance électrique et inversion du courant de l'induit.

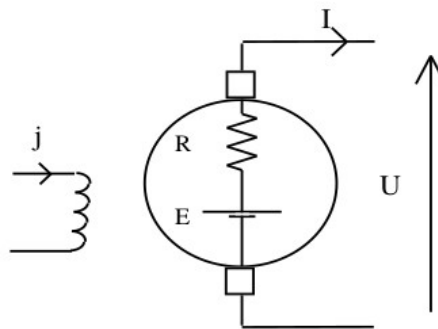


Figure 5 : schéma équivalent de la génératrice (convention générateur)

(1')- L'équation de la maille d'induit donne : $U=E-R.I$.

(2')- Le calcul de la force électromotrice donnerait : $E=K.\Phi. \Omega$

(3)- La conservation de la puissance nous donne : $P=E.I=C_e.\Omega$

(4')- des équations 2' et 3, on déduit $C_e=K. \Phi .I$.

Pertes dans le moteur à courant continu.

La puissance électrique susceptible d'être convertie sous forme mécanique est la puissance électrique absorbée par l'induit et vérifie $P_{abs}=U.I$ où U désigne la tension d'alimentation de l'induit et I le courant qui parcourt l'induit. Les pertes de la machine à courant continu se présentent sous trois formes (figure 6):

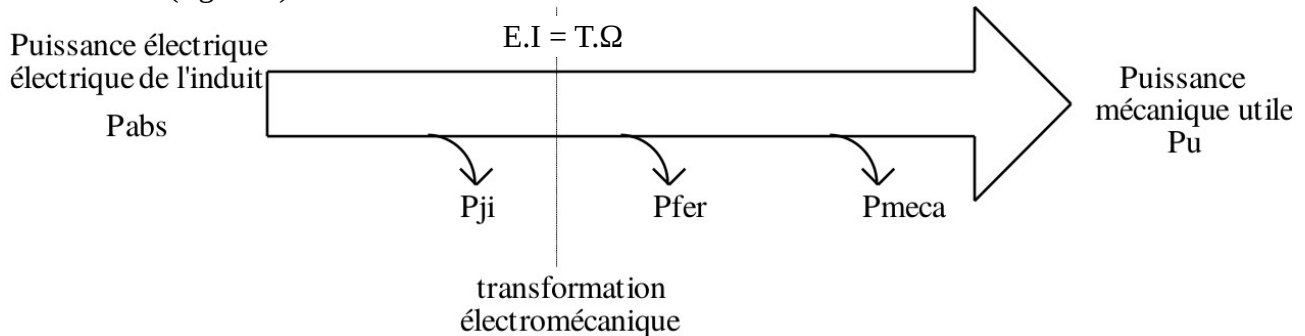


Figure 6 : axe des puissances du moteur à courant continu

- Les pertes par effet Joule au niveau des résistances de l'induit R , $P_{ji}=R.I^2$
- Les pertes mécaniques $P_{méca}$ (par frottement, ventilation,...). Ces pertes dépendent principalement de la vitesse de rotation.
- Les pertes magnétiques appelées aussi pertes fer (par hystérésis et courants de Foucault). Ces pertes dépendent de la vitesse de rotation et de l'induction (elles sont surtout localisées au rotor). Ces pertes sont donc à peu près constantes lorsque le flux utile et la vitesse de rotation sont constants.
- La puissance mécanique résultante est appelée puissance utile dans le cas du moteur :
- $P_u = U \cdot I - R \cdot I^2 - (P_{fer} + P_{méca})$

Le rendement (noté η) est le rapport de la puissance utile sur la puissance absorbée. Dans le cas du moteur, c'est le rapport de la puissance mécanique fournie, sur la puissance électrique absorbée (par l'inducteur et par l'induit) :

$$\eta = \frac{P_u}{P_{abs}} = \frac{U \cdot I - R \cdot I^2 - (P_{fer} + P_{méca})}{U \cdot I + U_{exc} \cdot j}$$

Modèle en régime dynamique

La machine est supposée parfaitement compensée, la réaction magnétique d'induit est négligée. Le schéma équivalent de la machine à courant continu (Figure 7) est de type RLE. Le rotor de la machine est soumis à des frottements visqueux et entraîne une certaine inertie. Lors d'un fonctionnement en charge, le moteur devra vaincre un couple résistant, aussi appelé couple utile.

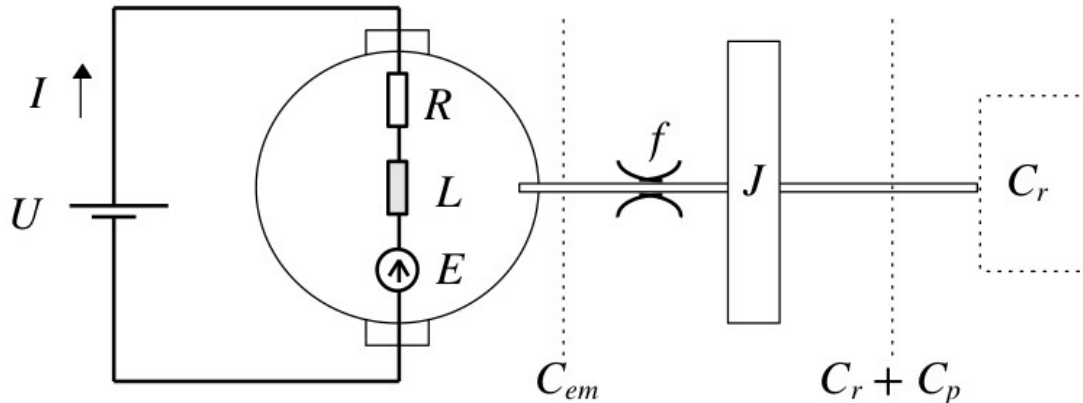


Figure 7 : Synoptique du fonctionnement de la machine à courant continu

Si l'excitation de la machine (courant inducteur) est constante, le flux induit est constant. Les équations de couplage (voir ci-dessous) sont alors simplifiées et offrent des relations linéaires entre la f.e.m et la vitesse, et entre le couple et le courant d'induit.

Équations de modélisation :

1. équation mécanique : $C_{em} = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p + C_r$
2. équation électrique : $U = R \cdot I + L \cdot \frac{di}{dt} + E$
3. équations de couplage électromécanique à flux constant : $E = k \cdot \Omega$
 $C_{em} = k \cdot I$

U : tension d'induit (V)

E : force électromotrice (V)

I : courant d'induit (A)

R : Résistance d'induit (Ω)

L : inductance d'induit (H)

Ω : vitesse de rotation angulaire (rad/s)

C_p : couple de frottement sec (N.m)

C_r : couple résistant ou couple utile (N.m)

C_{em} : Couple électromagnétique (N.m)

J : moment d'inertie ($\text{kg} \cdot \text{m}^2$)

f : frottements visqueux (N.m/rad/s)

k : constante de couplage électromécanique
en V/rad/s ou en N.m/A selon les cas

1/ Expression de la vitesse :

Donner l'expression de la vitesse de rotation Ω en fonction du flux Φ , de la tension d'alimentation d'induit U , du courant d'induit I , de la résistance d'induit R ainsi que du facteur K ($E = K \cdot \Phi \cdot \Omega$) lorsque la machine fonctionne en moteur.

$$\text{En moteur : } U = E + R \cdot I \text{ et } E = K \cdot \Phi \cdot \Omega \\ \text{d'où } U = K \cdot \Phi \cdot \Omega + R \cdot I$$

$$\text{On obtient alors } \Omega = \frac{U - R \cdot I}{K \cdot \Phi} \text{ avec } K = \frac{E}{\Phi \cdot \Omega} \text{ et } \Omega = \frac{2 \cdot \Pi \cdot n}{60} \text{ si } n \text{ est en tr/min}$$

Pouvez-vous en déduire la valeur interdite pour Ω ?

Oui, puisqu'on remarque aisément que si Φ diminue, alors Ω augmente. La valeur interdite est donc pour $\Phi = 0$ Wb car dans ce cas, la vitesse de rotation angulaire Ω est infinie et, par conséquent, il y a inévitablement la destruction de la MCC.

2/ Réglage de la vitesse :

On suppose que le flux Φ est proportionnel au courant d'excitation I_e ($\Phi = k' \cdot I_e$). Sachant que l'on ne contrôle pas le courant I , donner deux méthodes pour contrôler la vitesse de rotation Ω :

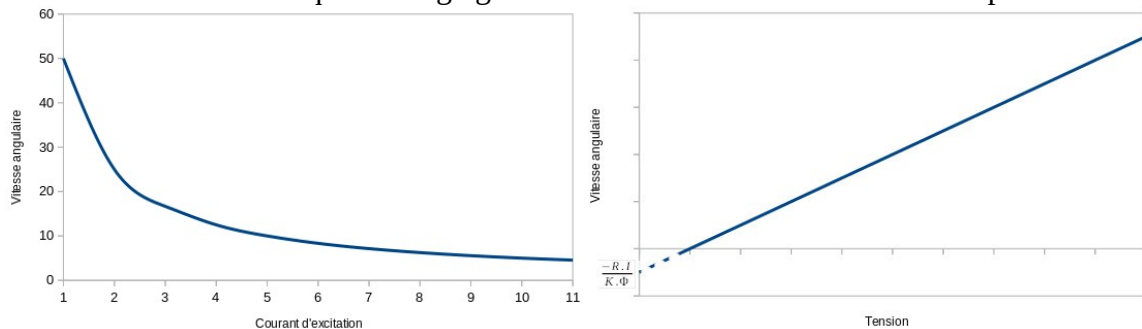
$$\Phi = k' \cdot I_e$$

$$\text{sachant que } \Omega = \frac{U - R \cdot I}{K \cdot \Phi} = \frac{U - R \cdot I}{K \cdot k' \cdot I_e}$$

On obtient 2 méthodes pour faire varier la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu :

- Variation de U → variation de la vitesse de rotation Ω
- Variation de I_e → variation de la vitesse de rotation Ω avec $I_e \neq 0A$

Donner l'allure des caractéristiques de réglage de la vitesse en fonction de ces deux paramètres.



La courbe $\Omega = f(I_e)$ est une hyperbole.

- Si $I_e = 0A$ alors Ω est infinie
- Si U varie, on obtient la même courbe mais décalée vers le haut ou vers le bas.
- Si le couple augmente, la vitesse Ω diminue

La courbe $\Omega = f(U)$ est une droite

- Obtenir Ω négatif est impossible
- Si le couple augmente, la vitesse Ω diminue

3/ Fonctionnement en génératrice :

La machine fonctionne en génératrice.

Quelle valeur doit-on donner au flux Φ pour que la tension d'induit soit nulle ?

$$\text{\textcolor{red}{À vide : } } U = E = K \cdot \Phi \cdot \Omega$$

Il faut donc un flux Φ nul pour avoir $E = 0V$

4/ Paramètres électriques :

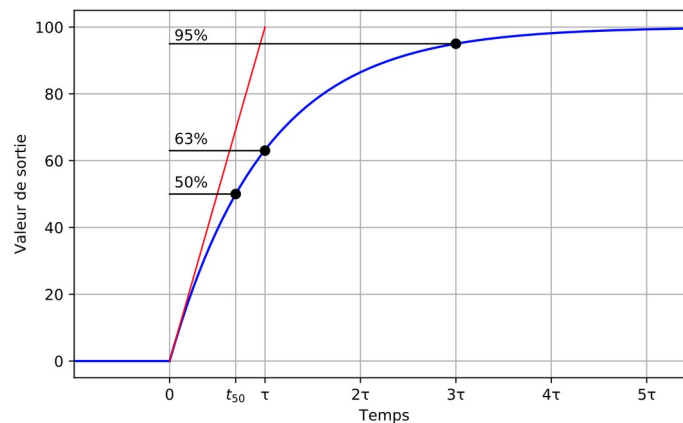
Les paramètres électriques principaux sont les suivants :

- la résistance de l'induit R ,
- la constante de temps de l'inducteur $\tau_{\text{inducteur}}$,
- la constante de temps de l'induit τ_{induit} .

Chaque constante de temps électrique est calculée à partir de la réponse indicielle du circuit.

Expliquer la procédure de détermination de chaque paramètre électrique.

La réponse indicielle : on applique un échelon de tension sur l'induit puis sur l'inducteur pour obtenir le signal suivant (circuit RL) :



$$U = R \cdot I + L \cdot \frac{di}{dt} \quad (E=0V \text{ puisque } \Omega=0\text{rad/s})$$

$$\text{\textcolor{red}{donc}} \quad i(t) = \frac{V}{R} + A \cdot \exp^{-t/\tau} \quad \text{\textcolor{red}{avec}} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\text{\textcolor{red}{à } } t=0s : i(0)=0 = \frac{V}{R} + A \quad \text{\textcolor{red}{donc}} \quad A = -\frac{V}{R}$$

$$\text{\textcolor{red}{donc, on obtient finalement}} \quad i(t) = \frac{V}{R} \cdot (1 - \exp^{-t/\tau}) \quad \text{\textcolor{red}{avec}} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

- Si $t = \tau$: $i(\tau) = \frac{V}{R} \cdot (1 - \exp^{-1}) = \frac{V}{R} \cdot (1 - 0,3678) = 0,632 \cdot \frac{V}{R}$ soit 63,2 % de $\frac{V}{R}$
- Si $t = 3 \cdot \tau$: $i(3 \times \tau) = \frac{V}{R} \cdot (1 - \exp^{-3}) = \frac{V}{R} \cdot (1 - 0,0498) = 0,95 \cdot \frac{V}{R}$ soit 95 % de $\frac{V}{R}$

Mesures pour l'induit et pour l'inducteur des R et des L :

Une alimentation stabilisée sera réservée aux mesures d'induit, et le réseau continu 220 V aux mesures d'inducteur. Les diverses constantes de temps seront obtenues par un relevé oscillographique, en synchronisant sur la mesure de la tension d'induit. Après une mesure de R (méthode volt-ampèremétrique), en déduire la valeur de L.

- Schéma de câblage avec schéma + appareils de mesure (aidez vous de la figure 9)
- Réalisation du câblage avec schéma + appareils de mesure à partir du schéma
- Vérification de l'enseignant
- Mesure

5/ Essai à vide à vitesse constante ($C_r = 0$)

La vitesse à vide Ω_0 , la tension à vide U_0 et le courant à vide I_0 , permettent de déterminer :

- la constante de couplage électromagnétique K
- le couple équivalent à l'ensemble des pertes $C_p + f \cdot \Omega_0$.

Donner les relations qui permettent de calculer ces divers paramètres.

$$\Omega = \frac{U - R \cdot I}{K \cdot \Phi} \text{ donc } k = \frac{U_0 - R \cdot I_0}{\Phi \cdot \Omega}$$

$$\text{de plus : } P_{\text{abs}} = U_0 \cdot I_0 = E \cdot I_0 + R \cdot I_0^2 = P_{\text{EM}} + R \cdot I_0^2$$

$$\text{donc } P_{\text{EM}} = E \cdot I_0 = P_{\text{méca}} + P_{\text{fer}} = C_{\text{EM}} \cdot \Omega_0 = \left(J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega_0 + C_p \right) \cdot \Omega_0$$

$$\text{à vitesse constante, on a } J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = 0$$

$$C_{\text{EM}} \cdot \Omega_0 = (f \cdot \Omega_0 + C_p) \cdot \Omega_0 = P_{\text{abs}} - R \cdot I_0^2 = U_0 \cdot I_0 - R \cdot I_0^2$$

$$C_{\text{EM}} = \frac{U_0 \cdot I_0 - R \cdot I_0^2}{\Omega_0} = \frac{E_0 \cdot I_0}{\Omega_0} = \frac{K \cdot \Phi \cdot \Omega_0 \cdot I_0}{\Omega_0}$$

$$C_{\text{EM}} = K \cdot \Phi \cdot I_0 = K' \cdot I_0 = f \cdot \Omega_0 + C_p$$

$$K' \text{ est dit le « couple électromagnétique avec } K' = K \cdot \Phi = \frac{E_0}{\Omega_0} = \frac{U_0 - R \cdot I_0}{\Omega_0}$$

Bilan : Grâce à l'essai à vide, nous avons déterminé les éléments suivants :

- la constante de couplage électromagnétique K'
- le couple équivalent à l'ensemble des pertes $f \cdot \Omega_0 + C_p$.

Procéder à l'essai à vide à la vitesse nominale, $N_{\text{nom}} = 1500 \text{ tr/mn}$ et pour un courant d'excitation $J_{\text{MCC}} = 0,34 \text{ A}$. En déduire la valeur de constante de couplage électromécanique

→ Schéma de câblage avec schéma + appareils de mesure

→ Réalisation du câblage avec schéma + appareils de mesure à partir du schéma

→ Vérification de l'enseignant

→ Mesure

6/ Essai en ralentissement

Cet essai permet de déterminer **les paramètres mécaniques**.

Si on annule rapidement le courant d'induit à l'instant $t=0$, le moteur ralentit sous l'effet des pertes (Figure 8)

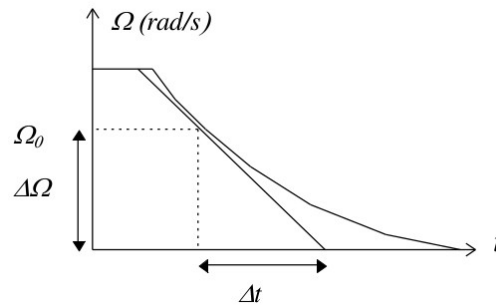


Figure 8 : Courbe d'un essai de ralentissement

6-1/ Montrer que le moment d'inertie des masses tournantes J peut être obtenu à partir de la pente de la courbe de ralentissement au point $\Omega = \Omega_0$ combinée aux résultats de l'essai à vide.

$$C_{em} = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p + C_r$$

à $t=0$ s, on a $I=0$ A donc $C_{em} = 0$ N.m

$$0 = J \cdot \frac{d\Omega_0}{dt} + f \cdot \Omega_0 + C_p + C_r \text{ et } C_r = 0 \text{N.m puisqu'il n'y a pas de charge donc pas de couple résistant}$$

$$0 = J \cdot \frac{d\Omega_0}{dt} + f \cdot \Omega_0 + C_p$$

On obtient alors : $0 = J \cdot \frac{d\Omega_0}{dt} + f \cdot \Omega_0 + C_p$ donc $J = \frac{-(f \cdot \Omega_0 + C_p)}{\frac{d\Omega_0}{dt}}$

Nous pouvons mesurer, lors de l'essai en ralentissement, la pente $\Delta\Omega/\Delta t$ qui a une pente négative, on obtient donc le moment d'inertie des masses tournantes par :

$$J = \frac{f \cdot \Omega_0 + C_p}{\frac{\Delta\Omega_0}{\Delta t}} \text{ notons que les pertes } f \cdot \Omega_0 + C_p \text{ ont été obtenues lors de l'essai à vide.}$$

6-2/ Montrer qu'il est possible de séparer les termes C_p et f à partir de la pente de la courbe de ralentissement au point $\Omega = 0$.

Nous allons, toujours sur le même essai de ralentissement, observer la tangente à la courbe $\Omega=f(t)$ lorsque $\Omega \rightarrow 0$ rad/s.

$$C_{em} = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p + C_r$$

On a toujours $I=0$ A donc $C_{em} = 0$ N.m

$$0 = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p + C_r \text{ et } C_r = 0 \text{N.m puisqu'il n'y a pas de charge donc pas de couple résistant}$$

$$0 = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p$$

donc, lorsque $\Omega \rightarrow 0$ rad/s, on a : $C_p = -J \cdot \frac{d\Omega}{dt}$

Nous pouvons mesurer, lors de l'essai en ralentissement, la pente $\Delta\Omega/\Delta t$ qui a une pente négative, on obtient donc le couple de perte :

$$C_p = J \cdot \frac{\Delta\Omega}{\Delta t} \text{ notons que le moment d'inertie } J \text{ a été calculé précédemment}$$

Pour les frottements visqueux f , nous pouvons l'obtenir aisément :

$$0 = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p \text{ donc } f \cdot \Omega_0 = C_{em} - C_p \text{ à } 1500 \text{ t/min par exemple (donc } J \cdot \frac{d\Omega}{dt} = 0)$$

$$f = \frac{C_{em} - C_p}{\Omega_0} = \frac{K' \cdot I_0 - C_p}{\Omega_0} \text{ notons que le le couplage électromagnétique } K' \text{ a été calculé ainsi que } C_p, \text{ le couple de perte.}$$

Machine excitée	Machine non excitée
J	J ₀
f	f ₀
C _p	C _{p0}

Essai de ralentissement à vide, machine excitée

Une dynamo tachymétrique est utilisée pour obtenir une tension image de la vitesse (Figure 10).

Amener la vitesse à 2000 tr/min en agissant sur la tension d'induit U sans changer l'excitation de la machine. Ouvrir le circuit d'induit et enregistrer la courbe de ralentissement avec un oscilloscope numérique. Cet essai permet de déterminer les coefficients J, C_p, et f.

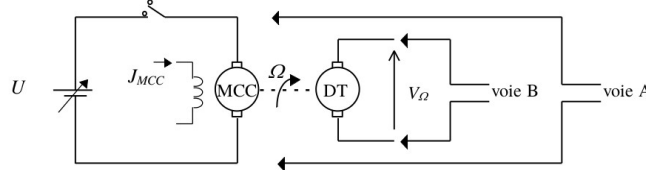


Figure 10: Montage pour la détermination du modèle

Essai de ralentissement à vide, machine non excitée

Amener la vitesse de l'induit à 1500 tr/min en agissant sur la tension d'induit U sans changer l'excitation de la machine. Ouvrir simultanément le circuit d'induit et le circuit de l'inducteur.

Enregistrer la courbe de ralentissement. Il faut un inverseur bipolaire équipé d'un système d'ouverture pour limiter l'arc électrique du circuit inducteur. Cet essai permet de déterminer les coefficients purement mécaniques J₀, C_{p0} et f₀. Comparez ces valeurs avec celles obtenues précédemment. Lesquelles prendre dans l'optique de réaliser une commande ?

Pertes fer :

1. Pertes par Hystérisis
2. Pertes constantes

7/ Essai de freinage

La voie de l'oscilloscope qui enregistre la courbe $I(t)$, servira au déclenchement de la base de temps (Figure 11).

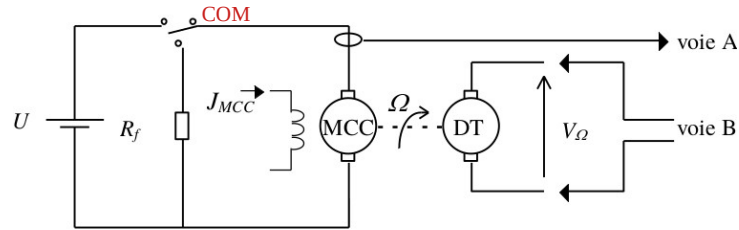


Figure 11 : Montage pour l'essai de freinage

Lorsque le commutateur est connecté sur la charge :

$U = E - R \cdot I$ et $E = K \cdot \Phi \cdot \Omega = U + R \cdot I = R_{\text{rhéostat}} \cdot I + R \cdot I = (R_{\text{rhéostat}} + R) \cdot I = R_T \cdot I$ d'une part

$$C_{em} = J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p = K \cdot \Phi \cdot I_{\text{en moteur}} = -K \cdot \Phi \cdot I_{\text{dans notre cas}} \quad \text{avec } I = \frac{E}{R_T}$$

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + f \cdot \Omega + C_p = -K \cdot \Phi \cdot I \cdot \frac{E}{R_T} = -K \cdot \Phi \cdot \frac{K \cdot \Phi \cdot \Omega}{R_T} = \frac{-K^2 \cdot \Phi^2 \cdot \Omega}{R_T}$$

On obtiens une équation différentielle du type :

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \left(f + \frac{K^2 \cdot \Phi^2}{R_T} \right) \cdot \Omega + C_p = 0$$

$$J \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \left(\frac{f \cdot R_T + K^2 \cdot \Phi^2}{R_T} \right) \cdot \Omega + C_p = 0$$

$$\frac{J \cdot R_T}{f \cdot R_T + K^2 \cdot \Phi^2} \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = \frac{-C_p \cdot R_T}{f \cdot R_T + K^2 \cdot \Phi^2}$$

$$\tau_m \cdot \frac{d\Omega}{dt} + \Omega = -\Omega_f$$

donc $\Omega(t) = -\Omega_f + A \cdot \exp^{-t/\tau_m}$

Conditions initiales : à $t=0s \rightarrow \Omega(0) = \Omega_0 = -\Omega_f + A$ donc $A = \Omega_0 + \Omega_f$

$$\Omega(t) = -\Omega_f + (\Omega_0 + \Omega_f) \cdot \exp^{-t/\tau_m}$$

à $t = t_f \rightarrow$

$$\Omega(t_f) = 0 = -\Omega_f + (\Omega_0 + \Omega_f) \cdot \exp^{-t_f/\tau_m}$$

$$\frac{\Omega_f}{(\Omega_0 + \Omega_f)} = \exp^{-t_f/\tau_m}$$

$$\ln\left(\frac{\Omega_f}{(\Omega_0 + \Omega_f)}\right) = \frac{-t_f}{\tau_m}$$

donc $-t_f = \tau_m \cdot \ln\left(\frac{\Omega_f}{(\Omega_0 + \Omega_f)}\right)$

et enfin $t_f = \tau_m \cdot \ln\left(\frac{(\Omega_0 + \Omega_f)}{\Omega_f}\right)$

lien intéressant : merci à eux

